Examen de Análisis de Variable Compleja.
Cuarto curso de Matemáticas (Metodología y Estadística).
17 de Febrero de 1997.

1. Estúdiese dónde es holomorfa la función
$$f(z) = \frac{1}{2i} log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$
Pruébese que $tg(f(z)) = z$ y obténgase el desarrollo de Taylor de f centrado en $z = 0$.

2. Describir todas las funciones f holomorfas en $\mathbb{C}^*$ que verifican $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$ y $|f(z)| = 1$ siempre que $|z| = 1$.

3.
   a) Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. Pruébese que si la parte real de f está mayorada o minorada en un entorno reducido de a entonces f es regular en a.
   b) Dedúzcase que si f tiene una singularidad en a entonces $exp(f)$ tiene una singularidad esencial en a.

4. Integrando la función
$$f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2(z^2+a^2)}$$
a lo largo de la frontera de la mitad del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, $0 < \varepsilon < a < R$, que está contenida en el semiplano superior, calcular la integral:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2(x^2+a^2)}\,dx$$